73050 TILASTOMATEMATIIKKA (AKK)

1. VÄLITENTTI 15.10.2001

Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Laita riittävästi välivaiheita ja perusteluita näkyviin. Niiden puuttuminen vähentää pisteitä. Palauta kaavakokoelma, mutta kysymyspaperin saat pitää. Tulokset ilmoitustaululla syysloman jälkeen.

---

1. Tiedetään, että sateen todennäköisyys seuraavana päivänä on 0.20 ja eri lämpötilojen todennäköisyydet ovat: yli $+1$: 0.40, $-1 - +1$: 0.30, alle -1: 0.30. Sade ja ilman lämpötila oletetaan toisistaan riippumattomiksi. Huoltofirmassa mietitään seuraavan päivän töitä. Jos lämpötila on alle $+1$, tarvitaan aina hiekoitusta. Jos lisäksi sataa (ja siis lämpötila on alle $+1$), on lumitöitä. Vesisateella pitää varautua sadevarustuksella.

a) Millä todennäköisyydellä seuraavana päivänä sataa lunta? (1 piste)

b) Eräässä autossa ei ole lainkaan hiekkaa, lumikolaa eikä sadevarustusta. Millä todennäköisyydellä tällä autolla selvitään seuraavan päivän tehtävistä? (2 pistettä)

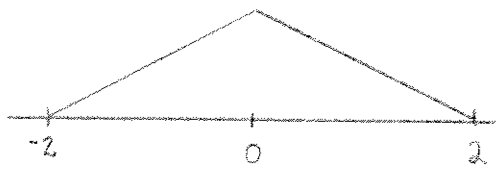
c) Auto käynnistyy yli $+1$ asteessa todennäköisyydellä 0.90 , $-1 - +1$ asteessa todennäköisyydellä 0.80 ja alle -1 asteessa todennäköisyydellä 0.70. Jos auto ylipäänsä lähtee aamulla käyntiin, niin millä todennäköisyydellä hiekkaa ei tarvitse ottaa mukaan? (3 pistettä)

2. Jatkuvan satunnaismuuttujan x tiheysfunktio $f(x)$ on välillä $[-2, 2]$ alla olevan kolmion muotoinen ja muualla $f(x) = 0$

a) Määritä tiheysfunktio. (2 pistettä)

b) Millä y:n arvolla on $P(x \geq y) = 0.25$? (2 pistettä)

c) Laske $\mathrm{E}(x)$ ja $\mathrm{var}(x)$ (2 pistettä)



3. Satunnaismuuttujan x odotusarvo on μ ja varianssi on σ^2. (2 pistettä)

a) Mikä on alaraja todennäköisyydelle $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma)$? (2 pistettä)

b) Jos $x \sim \mathrm{Tas}(0, 2)$, niin mitä on tällöin $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma)$? (2 pistettä)

c) Jos $x \sim \mathrm{N}(1, 4)$, niin mitä on tällöin $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma)$?

JOS KOPIOIT, NIIN PALAUTA TAKAISIN!

TM (AKK) 15.10.2001

(1) A = sataa $P(A) = 0.20$
B = lämpötila alle +1 $P(B) = 0.6$

A ja B riippumattomia

a) $P(\text{sataa lunta}) = P(A \cap B) \overset{\text{rmattomuus}}{=} P(A) \cdot P(B)$

$= 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$

b) H = tarvitaan hiekkaa
= lämpötila alle +1 $P(H) = 0.6$

L = tarvitaan lumikolaa
= sataa lunta $P(L) = 0.12$

S = tarvitaan sadevarustus
= sataa vettä
$P(S) = P(\overline{B}) \cdot P(A) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08$

	< −1	−1 – +1	> +1	
sataa	0.06	0.06	0.08	0.2
ei sada	0.24	0.24	0.32	0.8
	0.3	0.3	0.4	

$P(\overline{H} \cap \overline{L} \cap \overline{S})$
$= P(\overline{S} \cap \overline{H}) = 0.8 \cdot 0.4$
$= 0.32$

c) $P(\text{auto käynnistyy})$
$= 0.4 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.7 =$
$0.36 + 0.24 + 0.21 = 0.81$

A = auto käynnistyy $\quad P(A) = 0.81$

B_1 = alle -1
B_2 = -1 – $+1$
B_3 = yli $+1 \quad P(B_3) = 0.4$

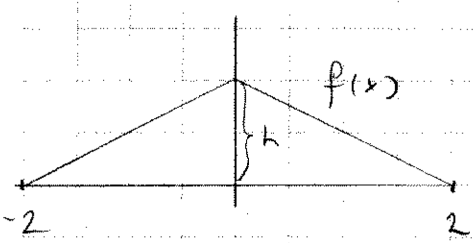
Hiekkaa ei tarvita = B_3

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(B_3)\,P(A \mid B_3)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.9}{0.81} = \frac{4}{9}$$

$$\approx 0.444$$

2

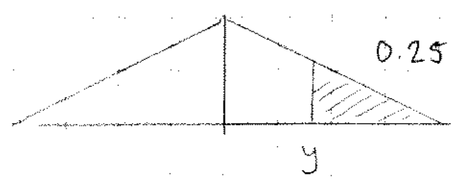
a) kolmion ala = 1



$\frac{1}{2} \cdot h \cdot 4 = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & \text{kun } x \in [-2, 0] \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & \text{kun } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

b) $P(X \geq y) = 0{,}25$



$$\int_y^2 -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \Big/_y^2 -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

③ $E(x) = \mu \quad Var(x) = \sigma^2$

a) $P(\mu - 3\sigma \le x \le \mu + 3\sigma)$

$= 1 - P(|x-\mu| \ge 3\sigma)$

Tšebyšev

$\ge 1 - \frac{\sigma^2}{3\sigma^2} = 1 - \frac{1}{9} = \underline{\underline{0.8888}}$

b) $x \sim Tas(0,2)$ $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0,2] \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$

$E(x) = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = 1$

TAI MUISTAMALL.

$E(x) = \frac{2+0}{2} = 1$

$Var(x) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$

$E(x^2) = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \Big/_0^2 \frac{1}{6} x^3 = \frac{4}{3}$

$Var(x) = \frac{4}{3} - 1^2 = 1/3 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 1/\sqrt{3}$

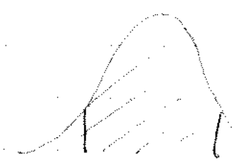
$P(\mu - 3\sigma \le x \le \mu + 3\sigma)$

$= P(1 - 3/\sqrt{3} \le x \le 1 + 3/\sqrt{3})$

$= P(-0.732 \le x \le 2.732) = \underline{\underline{1}}$

c) $x \sim N(1,4) \quad \mu = 1 \quad \sigma = 2$

$P(\mu - 3\sigma \le x \le \mu + 3\sigma)$



$= P(-3 \le \underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \le 3) =$

$= 1 - 2(1 - \Phi(3)) = 2\underbrace{\Phi(3)}_{0.9987} - 1 = \underline{0.9974}$

$$y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \overset{(+)}{-} \sqrt{2}$$

$$2 - \sqrt{2} \approx 0.5857$$

Eli $P(x \geq 2-\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$

c) $E(x) = \int_{-2}^{0} x\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)dx$

$$= \Big/_{-2}^{0} \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \Big/_{0}^{2} -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$= -\left(-\frac{8}{12} + 1\right) + -\frac{8}{12} + 1 = 0$$ (intuitiivisesti selvää)

$$E(x^2) = \int_{-2}^{0} x^2\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} x^2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \Big/_{-2}^{0} \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \Big/_{0}^{2} -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

$$= -\left(1 - \frac{8}{6}\right) + \left(-1 + \frac{8}{6}\right) = -1 + \frac{8}{6} - 1 + \frac{8}{6}$$

$$= -2 + \frac{16}{6} = 4/6$$

$$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \underline{\underline{2/3}}$$