

1. välikoe = tehtävät 1,2 ja 3 ; 2. välikoe = tehtävät 4,5,6.
Tentti = viisi tehtävää kuudesta.

1. Olkoot A ja B saman otosavaruuden tapahtumia siten, että $P(A) = 0.5$ ja $P(B) = 0.4$. Laske $P(A \cup B)$, kun
 - a) $A \cap B = \emptyset$
 - b) A ja B ovat riippumattomia.

2. a) Sähköisen komponentin kestoikä t (vuosissa) noudattaa eksponentiaalijakaumaa parametrillä $\lambda = 2$; ts. sen tiheysfunktio on $f(t) = 2e^{-2t}$, kun $t \geq 0$. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu komponentti kestää ainakin kuusi kuukautta?
 - b) Millä todennäköisyydellä tällainen komponentti kestää vielä ainakin neljä kuukautta, kun se on ollut käytössä jo kuusi kuukautta?

3. Jatkuvan satunnaismuuttujan x tiheysfunktio on $f(x) = c/x^2$, kun $1 \leq x \leq 4$ (ja $f(x) = 0$ muulloin).
 - a) Määrä vakio c , ja laske x :n odotusarvo μ .
 - b) Laske todennäköisyys $P(|x - \mu| \leq 1.5)$.

4. Satunnaisvektorin $\mathbf{x} = (x, y)$ tiheysfunktio on $f(x, y) = 3x$, kun $0 < y < x < 1$. Laske satunnaismuuttujan x odotusarvo ja varianssi.

5. Satunnaismuuttujasta $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ on otettu 10 kappaleen otos: 3.2, 3.6, 3.4, 3.6, 3.2, 3.3, 3.5, 3.2, 3.6, 3.2. Otoskeskiarvoksi ja otoshajonnaksi saatiin vastaavasti $\bar{x} = 3.38$ ja $s = 0.1814$.
 - a) Testaa nollihypoteesi $H_0: \sigma^2 = 0.03$ vaihtoehtoa $H_1: \sigma^2 > 0.03$ vastaan 5%:n riskitasolla.
 - b) Etsi odotusarvon μ 90%:n luottamusväli. Pitäisikö yllä mainituista 10 havainnosta yhdeksän osua tälle luottamusvälille? Selitä perusteellisesti!

6. a) Olkoon $x \sim \text{Bin}(n, p)$, jolloin $E(x) = np$ ja $\text{var}(x) = np(1-p)$. Osoita, että jos $\hat{p} = \frac{x}{n}$, niin $E(\hat{p}) = p$, ja laske $\text{var}(\hat{p})$.
 - b) Tehtaan tuotteista on 4.00% viallisia. Laske binomijakauman normaaliapproksimaatiota käyttäen todennäköisyys, että 1200 kappaleen erässä on ainakin 35, mutta enintään 50 viallista.

.050 Tilastomatematiikan kaavoja ja taulukoita

1. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$
2. $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$
3. $P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$
4. $f(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right|$
5. $\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$
6. $P(|x - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \quad \forall t > 0$
7. $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad P(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$
8. $\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$
9. $\text{var}(ax + by) = a^2 \text{var}(x) + b^2 \text{var}(y) + 2ab \text{cov}(x, y)$
10. $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
11. $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

12. $\frac{(\bar{x} - \mu)}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
13. $\frac{s_x^2/\sigma_x^2}{s_y^2/\sigma_y^2} \sim F(n_x - 1, n_y - 1)$
14. $\left[\bar{x} - z_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] : P(-z_1 \leq z \leq z_1) = 1 - \alpha$
15. $\left[\bar{x} - t_1 \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_1 \frac{s}{\sqrt{n}} \right] : P(-t_1 \leq t \leq t_1) = 1 - \alpha$
16. $\left[\frac{(n-1)s^2}{w_2}, \frac{(n-1)s^2}{w_1} \right] : P(h < w_1) = P(h > w_2) = \frac{\alpha}{2}$
17. $\left[\hat{p} - z_1 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_1 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] : P(-z_1 \leq z \leq z_1) = 1 - \alpha$
18. $\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{s_p^2(1/n_x + 1/n_y)}} \sim t(n_x + n_y - 2); \quad s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}$
19. $\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1); \quad \hat{p} = \frac{x}{n}$
20. $z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}} \sim N(0, 1); \quad \hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$
21. $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = X^+ y$
22. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \|e\|^2; \quad e = y - X\hat{\beta}$
23. $t_1 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma} \sqrt{c_H}} \sim t(n-p); \quad c_H = \left\{ (X^T X)^{-1} \right\}_{11}$
24. $\left[\hat{\beta}_1 - t_1 \hat{\sigma} \sqrt{c_H}, \hat{\beta}_1 + t_1 \hat{\sigma} \sqrt{c_H} \right] : P(-t_1 \leq t_1 \leq t_1) = 1 - \alpha$

0, 1)-distribution: $\Phi(z) = P(x \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$

t-distribution: $F(x) = P(t \leq x); \quad t = \frac{u}{\sqrt{w/\gamma}}, \quad u \sim N(0, 1), \quad w \sim \chi^2(\gamma)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8105	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

F	0.80	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.708	31.821	63.657	636.619
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.053	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
=	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

