

**MAT-10312 Insinöörimatematiikka B 1**
Tentti 23.10.2009

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

1. a) Osoita oikeaksi tai vääräksi: $n^2 + n + 1$ on alkuluku jokaisella $n \in \mathbb{N}$. (Alkuluku on luonnollinen luku, joka ei ole jaollinen muilla luonnollisilla luvuilla kuin ykkösellä ja itsellään.)

b) Olkoon

$$f(x) = \lfloor 2x - \frac{1}{2} \rfloor \quad \text{ja} \quad g(x) = \cos x,$$

missä

$$\lfloor x \rfloor = \text{suurin } n \in \mathbb{Z}, \text{ jolle } n \leq x.$$

Piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja välillä $[-1, 1]$ ja selvitä funktion $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arvojoukko.

2. a) Missä kompleksitason pisteissä $z = x + yi$ on

$$|z - 2i| = |z - 1|?$$

Piirrä kuva!

b) Olkoon $z_1 = e^{i\pi/4}$ ja $z_2 = e^{-i\pi/3}$. Ilmoita $z_1^2 + iz_2$ muodossa $a + bi$.

3. Olkoon $\mathbf{x} = (2, 1, -2)$ ja $\mathbf{y} = (1, -a, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Tutki, millä a :n arvoilla

a) vektorit \mathbf{x} ja \mathbf{y} ovat yhdensuuntaiset,

b) vektorit \mathbf{x} ja \mathbf{y} ovat kohtisuorassa,

c) vektorit \mathbf{x} ja \mathbf{y} ovat 45° kulmassa,

d) pisteen $(3, 1, -2)$ kautta kulkeva vektorin \mathbf{y} virittämä suora leikkaa z -akselin.

4. Anna tasojen $x + y + z = 5$ ja $4x + y + 2z = 15$ leikkaussuoran parametriesitys vektorimuodossa.

Kaavoja:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$