

MAT-10325 Insinöörimatematiikka E 2

Tentti 29.11.2005

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta!

T1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ja kääntyvä.

a) Laske $A^2 - (\text{trace}(A))A + \det(A)I$

b) Mikä on A:n käänteismatriisi?

c) Aseta a)-kohdan lauseke = 0 (nollamatriisi), kerro puolittain oikealta A:n käänteismatriisilla ja ratkaise yhtälöstä tämä käänteismatriisi. Sijoita alkioit. Miten tulos poikkeaa b)-kohdan vastauksestasi?

T2. Matriisit B ja C kommutoivat, jos $BC = CB$. Matriisi B on symmetrinen, jos $B^T = B$.

a) Osoita: Jos kääntyvät matriisit B ja C kommutoivat, niin myös B:n ja C:n käänteismatriisit kommutoivat.

b) Osoita: Jos kääntyvä tulomatriisi BC on symmetrinen, niin myös BC:n käänteismatriisi on symmetrinen.

T3. a) Tutki vektorien summan ja skalaarilla kerrotun vektorin kuvautumisen perusteella, onko kuvaus

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x + z \end{bmatrix} \text{ lineaarinen.}$$

b) Jos on lineaarinen, niin mikä on kuvauksen matriisi?

c) Mikä olisi tällöin kuvausmatriisin sarakeavaruuden $\text{col}(A)$ kanta?

T4. Etsi ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

HUOM! Jossain laskussa sinulle saattaa olla hyötyä seuraavasta:

$$a^3 - 5a^2 + 8a - 6 = (a - 3)(a^2 - 2a + 2)$$