

MAT-10332 Insinöörimatematiikka B 3 (Perttula)
MAT-10333 Insinöörimatematiikka C 3 (Vattulainen)
MAT-10335 Insinöörimatematiikka E 3 (Lehto)

Tentti 10.4.2006

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta!

T1. a) Osoita, että funktiolla $y = f(x) = \frac{4x^5}{x^2 + 1}$ on käänteisfunktio, muodostamatta itse käänteisfunktioita. **b)** Laske $Df^{-1}(f(1))$ eli käänteisfunktion derivaatta arvolla $f(1)$ muodostamatta itse käänteisfunktioita.

T2. a) Laske $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{\arcsin(2x)}$. **b)** Ratkaise $\sinh(\ln x) = 2$

T3. Laske integraalit **a)** $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ ja **b)** $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt$.

T4. Laske integraali $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx$ korvaamalla integrandi sen 2-asteisella Maclaurinin polynomilla. Mikä on **maksimivirhe** tässä approksimaatiossa? (Derivoitaessa kannattanee jossain vaiheessa hyödyntää tietoa $2 \sin x \cos x = \sin 2x$.)

MAT-10332 Insmat 3/ Vihjeitä

1. $\int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t))$, missä $F' = f$
2. $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$
3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$ ja $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ ja $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ ($|x| < 1$)
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \arcsinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ ($x > 1$)
7. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & (|x| < 1) \\ \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} & (|x| > 1) \end{cases}$
8. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$ ja $\text{ala} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2} dx$
9. tilav. = $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$ ja $\text{ala} = \frac{1}{2} \int_a^\beta r(\theta)^2 d\theta$
9. $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
10. $\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(x)$; $y = e^{-A(x)} \left(\int f(x)e^{A(x)} dx + C \right)$, $A'(x) = a(x)$
11. $D \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ ($g(x) \neq 0$)

12. $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
13. $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
14. **Taylorin sarjoja**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$
 ($x \in \mathbb{R}$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots$$
 ($x \in \mathbb{R}$)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \dots$$
 ($x \in \mathbb{R}$)

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots$$
 ($x \in \mathbb{R}$)

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + \dots$$
 ($x \in \mathbb{R}$)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \dots$$
 ($|x| \leq 1$)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \dots$$
 ($-1 < x \leq 1$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots$$
 ($|x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$)