

MAT-20500 Todennäköisyyslaskenta

Tentti 10.10.2005

Tentissä saa olla mukana funktiolaskin.

Älä tee kaavakokoelmaan merkintöjä ja palauta tentin jälkeen.

Vastaa jokainen tehtävä omalle arkilleen.

Merkitse joka paperiin nimesi ja opiskelijanumerosi.

Palauta ainakin tehtävän 1 vastauspaperi, vaikkeet olisikaan tehnyt tehtävää ja merkitse tämän 1. paperin yläreunaan niiden tehtävien numerot, joista jätit ratkaisun.

1. Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia ja yhtä todennäköisiä. Mitä on $P(A)$, kun

a) $P(A \cap B) = 0.25$

b) $P(A \cup B) = 0.36$

c) $P(A \cup B) = P(A \cap B)$. Mitä voit tässä tapauksessa sanoa tapahtumista A ja B?

2. Jatkuvan satunnaismuuttujan x tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4} & \text{kun } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

a) Laske $E(x)$

b) Jos x on neliön sivun pituus, niin mikä on neliön pinta-alan odotusarvo?

c) Määritä kertymäfunktio määrittelyjoukkonaan koko \mathbb{R} .

3. Arpajaisissa joka kymmenennellä arvalla voittaa 20 euroa. Arvan hinta on 2 euroa. Henkilö ostaa arpoja 100 eurolla. Millä todennäköisyydellä hänen ostamiensa arpojen voittosumma on vähintään 100 euroa.

Ilmoita tarkka arvo lausekkeena, jonka numeerista arvoa ei tarvitse laskea.

Laske numeerinen arvo Poisson-approksimaation avulla.

(Approksimaatio toimii tässä tehtävässä 0.01 tarkkuudella.)

4. 18 mittauksessa saatiin mittausten otoskeskiarvoksi 54.22 ja otosvarianssiksi 72.00. Mittaustulos oletetaan normaalisti jakautuneeksi.

a) Testaa 5%:n riskitasolla, onko mittaustuloksen odotusarvo = 50 vai onko se suurempi kuin 50.

b) Mikä on testin p-arvo (tarkin arvo, jonka voit määrittää)?

① A ~ B jika sama artinya $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 A dan B tidak saling eksklusif jika $P(A) - P(B) = P$

a) $P(A \cap B) = P^2 \Rightarrow P = 0.5$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= 2P - P^2 = 0.36$

$$P^2 - 2P + 0.36 = 0$$

$$P = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0.36}}{2} = 1 \pm \sqrt{0.64}$$

$$= 1 \pm 0.8 = 0.2 \quad (+ \text{ di kaji})$$

c) $P(A \cup B) = P(A \cap B)$

$$2P - P^2 = P^2 \Leftrightarrow 2P^2 - 2P = 0$$

$$P = 0 \text{ atau } P = 1$$

A dan B saat makalahnya takahitnya
 dan disini varnya takahitnya

② $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4} & , x \in [0, 2] \\ 0 & , \text{mussin} \end{cases}$

a) $E(x) = \int_0^2 x \left(-\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4} \right) dx$
 $= \int_0^2 \left(-\frac{3}{48}x^4 + \frac{3}{4}x^2 \right) dx = -\frac{3}{4 \cdot 16} \cdot 16 + \frac{3}{4} \cdot 4$
 $= -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

b) Jelas x on neuron diitu, nilai
 nilai on on pinta-alan dan harga

$$E(x^2) = \int_0^2 x^2 \left(-\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{3}{512}x^5 + \frac{3}{4}x^3 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{3}{80}x^2 + \frac{3}{4}x^3 \right]_0^2 = -\frac{3}{80} \cdot 32 + \frac{3}{4} \cdot 8$$

$$= -\frac{3 \cdot 2}{5} + 2 = \frac{4}{5}$$

c) $\int_0^x \left(-\frac{3}{16}t^2 + \frac{3}{4} \right) dt$
 $= \left[-\frac{1}{16}t^3 + \frac{3}{4}t \right]_0^x$
 $= -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{4}x$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lewn } x < 0 \\ -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{4}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{lewn } x > 2 \end{cases}$$

3. Arpaosat

voiton tn = $\frac{1}{10}$, voittosumma 20€

arvon luvua = 2€

100€ lra arpija = 50 arpoja

x-voittokertojen lkm 50 arvon

$X \sim \text{Bin}(50, 0.1)$

P(100€ väh. 100€ voittaja)

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{50}{k} 0.1^k \cdot 0.9^{50-k} = (x)$$

Poisson-approksimaatio $x \sim \text{Poi}(5)$

$$1 - P(x \leq 4)$$

$$= 1 - e^{-5} \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} \right)$$

$$= 0.5595 \approx 0.56$$

$$x) 1 - \left[\binom{50}{0} 0.9^{50} + \binom{50}{1} 0.1 \cdot 0.9^{49} + \binom{50}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^{48} + \binom{50}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^{47} + \binom{50}{4} 0.1^4 \cdot 0.9^{46} \right]$$

$$\approx 0.5688 \text{ (ei tarkan lauseen)}$$

4.

$$\bar{x} = 54.82$$

$$s^2 = 7.2$$

$$n = 18$$

$$\alpha = 0.05$$

$$H_0: \mu = 50$$

$$H_1: \mu > 50$$

$$t \sim t(17)$$

$$t^* = \frac{\bar{x} - 50}{\sqrt{7.2/18}} = \frac{54.82 - 50}{\sqrt{4}} = 2.11$$

$$C = [1.740, \infty), \quad P(X > 1.740) = 0.05$$

(t:n:n)

$$t^* \in C \Rightarrow H_0 \text{ hylätään, } \mu > 50$$

$$p\text{-arvo} = P(t > t^*) \text{ (t:n:n test.)}$$

$$= P(t > 2.11) = \underline{\underline{0.025}}$$

t-testuluvasta löytyy juri tärinä arvo (vapautuu t:n:n)