

MAT-20500 Todennäköisyyslaskenta
Tentti 28.11.2005

- Tentissä saa olla mukana funktiolaskin.
- Älä tee kaavakokoelmaan merkintöjä ja palauta tentin jälkeen.
- Vastaa jokainen tehtävä omalle arkilleen.
- Merkitse joka paperiin nimesi ja opiskelijanumerosi.
- Jos sinulla on laskuhyvityspisteitä, merkitse myös se luentoryhmä (Periodi 1 / Periodi 2), jossa sinun pisteesi on kirjattuna.
- Palauta ainakin tehtävän 1 vastauspaperi, vaikkeet olisikaan tehnyt tehtävää ja merkitse tämän 1. paperin yläreunaan niiden tehtävien numerot, joista jätit ratkaisun.

1. a) Tiedetään, että $P(B \cap \bar{A}) = 0.6$ ja $P(A | B) = 0.2$. Mitä on $P(B)$? (3 pistettä)
b) Osoita: Jos A ja B ovat saman otosavaruuden riippumattomia tapahtumia, niin \bar{A} ja \bar{B} ovat myös riippumattomia. (3 pistettä)
Vihje: DeMorganin lait: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2. Satunnaismuuttujan x otosavaruus $\Omega = \{0, 1, 2\}$ ja todennäköisyydet ovat $P(x = 0) = 0.5$, $P(x = 1) = 0.3$ ja $P(x = 2) = 0.2$. Suoritetaan kaksi satunnaismuuttujan x riippumattomaa koetta x_1, x_2 ja muodostetaan uusi satunnaismuuttuja $y = x_1 + x_2$.
a) Laske $P(y = 2)$. (2 pistettä)
b) Laske $E(y)$. (2 pistettä)
c) Piirrä y :n **kertymäfunktion** $F(y)$ kuvaaja. Laita kuvaajan akseleille kaikki kuvaajan kannalta oleelliset numeroarvot. (2 pistettä)

3. Opettaja tietää kokemuksesta, että 40% tenttiin ilmoittautuneista opiskelijoista ei saavu paikalle. Tenttiin on ilmoittautunut 200 opiskelijaa. Laske kuinka suuri sali tarvitaan, että kaikki paikalle tulevat saavat 99% :n todennäköisyydellä istumapaikan.

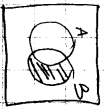
Tehtävän satunnaismuuttujan jakaumaa voi kurssin tietojen perusteella approksimoida kahdella muulla jakaumalla, joista toinen soveltuu paremmin tähän tilanteeseen. Käytä sitä.

4. Oletetaan mittaustuloksen noudattavan normaalijakaumaa. Suoritetaan kolme mittausta ja saadaan tulokset 25, 28, 28.
a) Testaa 5 %:n riskitasolla, onko tuloksen odotusarvo = 30 vai onko se vähemmän? (4 pistettä)
b) Mikä on mittaustuloksen varianssin 90% :n luottamusväli? (2 pistettä)

$$\textcircled{1} a) P(B \cap \bar{A}) = 0.6$$

$$P(A|B) = 0.2$$

$$\begin{cases} P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) \\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$$



$$\rightarrow -P(B \cap \bar{A}) + P(B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{1 - P(A|B)} = \frac{0.6}{1 - 0.2} = \underline{\underline{0.75}}$$

b) Oletta $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 Oletta $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

Tasauska $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

$$= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \quad (2)$$

$$Nyt (1) = (2) \quad \square$$

$$\textcircled{2} \Omega = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = 0.5$$

$$P(X=1) = 0.3$$

$$P(X=2) = 0.2$$

2 koeita $X_1, X_2 \Rightarrow Y = X_1 + X_2$

$$Y\text{'in otosavaruus} = \Omega_Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(Y=0) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

$$P(Y=1) = 0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.30$$

$$P(Y=2) = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.29$$

$$P(Y=3) = 2 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.12$$

$$P(Y=4) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

$$\Sigma = 1$$

a) $P(Y=2) = \underline{\underline{0.29}}$

b) $E(Y) = 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.30 + 2 \cdot 0.29$
 $+ 3 \cdot 0.12 + 4 \cdot 0.04$
 $= 0.30 + 0.58 + 0.36 + 0.16$
 $= \underline{\underline{1.40}}$

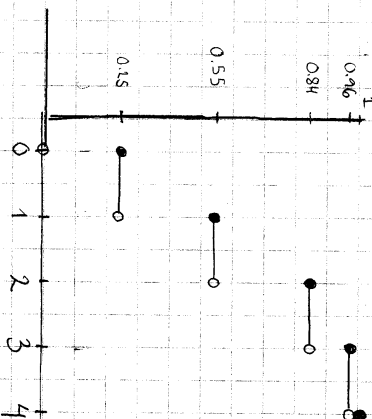
c) $\begin{matrix} 1 \\ 0.96 \\ 0.84 \end{matrix}$
 b) - loppujen
 vaihteluvuon
 laskenta

$$E(X) = 0.5 \cdot 0 + 0.3 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 = 0.70$$

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$$

$$= 0.70 + 0.70$$

$$= \underline{\underline{1.40}}$$



3) $X =$ päivälle tulevien lkm 200:stä

$$X \sim \text{Bin}(200, 0.6)$$

$$\text{Sain loko} = k$$

$$\text{Määritys: } P(X \leq k) = 0.99$$

$$X \sim N(120, 48) \quad \text{Normaal' approksimatio}$$

$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X-120}{\sqrt{48}} \leq \frac{k-120}{\sqrt{48}}\right) = 0.99$$

$$\text{Taulukosta } \Phi(3.33) = 0.99$$

$$\Rightarrow 2.33 = \frac{k-120}{\sqrt{48}} \Rightarrow k = 136.14$$

$$\text{Sain loko } \underline{137}$$

4) niitanket 25, 28, 28, $n=3$

$$\bar{x} = \frac{25+28+28}{3} = 27$$

$$s^2 = \frac{1}{3-1} \left((25-27)^2 + (28-27)^2 + (28-27)^2 \right) = 3$$

$$= \frac{1}{2} (4+1+1) = 3$$

a)

$$H_0: \mu = 30$$

$$H_1: \mu < 30$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$t^* = \frac{27-30}{\sqrt{3}/\sqrt{3}} = -3.00$$

Kriittinen alue $(-\infty, c]$

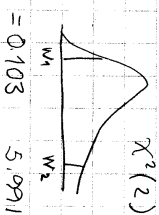
$$P(t < c) = 0.05, t \sim t(2)$$

$$c = -2.960$$

$$t^* \in C \Rightarrow H_0 \text{ hylätään, } \mu < 30$$

b) Varianssi 90%:n lu

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{w_2}, \frac{(n-1)s^2}{w_1} \right]$$



$$= 0.103 \quad 5.991$$

$$= \left[\frac{2 \cdot 3}{5.991}, \frac{2 \cdot 3}{0.103} \right]$$

$$= [1.50, 58.25]$$